Les lois de probabilités.

La mesure de la probabilité de (X<x) est la fonction de réparation de la v.a X P(X<x) = $F_X(x)$.
Il en découle la fonction de densité de probabilité $f_X(x)$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \text{et} \quad F_X(x) = \int_{\min D_X}^{x} f_X(t)dt;$$

Une loi de probabilité pour une variable aléatoire (v.a.) X a pour objectif de proposer une modélisation qui tient compte de la dispersion de l'information étudiée.

Ainsi une loi de probabilité est décrite par une fonction

L(X) = L(x ; θ_j) .

x: présente les réalisations.

θ_j: un ensemble de paramètres qui sont une lecture des différentes indicateurs de la forme selon laquelle l'information aléatoire étudiée est distribuée dans le domaine de définition de X (D_x). Avec la fonction $f_X(x)$, on définit :

- Les moments théoriques non centrés d'ordre k:

$$\mu'_k(X) = \mu'_k = \int_{D_X} x^k \; f_X(x)\,dx = E[X^k] \qquad \text{Ainsi } \mu'_1(X) = \mu'_1 = E[X] = m_X = moyenne$$

- Les moments théoriques centrés :

$$\mu_k(X) = \int_{Dx} (x - E(X))^k .dx. f_X(x) = \mu_k \quad donc \quad \mu_0 = 1; \quad \mu_1 = 0; \quad \mu_2 = V(X)$$

- Les coefficients théoriques de formes :

Coefficient théorique d'asymétrie	Coefficient théorique d'aplatissement
$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$	$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

<u>Alors : Notre objectif est d'écrire $f_X(x)$ en fonction de</u> $\mu_k(X)$

Les moyens sont la première fonction caractéristique et la deuxième fonction caractéristique :

1ère f.c. $\varphi_X(t) = E\{e^{itx}\} = \int_{Dx} e^{itx}.f_X(x)\,dx = \int_{Dx} e^{itx}\,dF_X(x)$

2ème f.c. $\psi_X(t) = \ln \varphi_X(t)$

- Fonctions caractéristiques

$$\varphi_X(t) = \int_{D_X} e^{itx}\,dF_X(x) = E\{e^{itx}\} alors \qquad dF_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{D'_t} e^{-itx}\varphi_X(t)dt$$

Il suffit alors de proposer une fonction $\varphi_{X(t)}$ qui respecte :

- $|\varphi_x(t)| \leq 1$; $|\varphi_x(t)| = 1$; $\varphi_x(t)$ continue, intégrable toujours convergente.

Et nous obtenons aussi $dF_X(x) \to F_X(x) \to f_X(x);$

$\varphi_X(t)$ *en fonction de* μ'_k ;

$$\varphi_X(t) = E\{e^{itx}\} = E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E\{X^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}.\mu'_k$$

<u>* Résultats importants : soient</u> μ_X *et* $\varphi_X(t)$

1) $\frac{d^k}{dt^k}\varphi_X(t) = i^k \int_D x^k e^{itx} dF_X(x) \Rightarrow \quad \frac{d^k}{dt^k}\varphi_X(t)\Big|_{t=0} = i^k.\mu'_k$

2) cas particulier

Y = a.X+b alors $\varphi_Y(t) = E\left\{e^{it(a.x+b)}\right\} = e^{itb} E\left\{e^{i(at)x}\right\} = e^{itb}\varphi_X(at)$

3) Soient n v.a. indépendant X_k de f.c. $\varphi_{X_k}(t)$

$$si \quad Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k \quad alors \quad \varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(\lambda_k t)$$

En effet : $\varphi_Y(t) = E\left\{ e^{it\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k} \right\} = E\left\{\prod_{k=1}^{n} e^{it\lambda_k X_k}\right\} = \prod_{k=1}^{n} E\left\{e^{it\lambda_k X_k}\right\} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(\lambda_k t)$

* La seconde fonction caractéristique $\varphi_X(t) = \ln\varphi_X(t)$

objectif $\psi_X(t)$; $\varphi_X(t)$ en fonction de μ_k

Soit X une v.a. d'une moyenne m_X=E(X), soit Z = X- m_X = X-E(X) ; alors X = Z+E(X)

$$\varphi_X(t) = e^{itE(X)}.\varphi_Z(t) = e^{itm}\varphi_Z(t)$$

$$\begin{aligned}
\psi_x(t) &= itm + \ln\left[\varphi_z(t)\right] \\
&= itm + \ln\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}\mu'_k(Z)\right] \\
or \quad & Z = X - E(X)\ ;\ \mu'_k(Z) = \mu_k(X) \\
&= itm + \ln\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mu_k(X)\right] \\
&= itm + \ln\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mu_k(X)\right]
\end{aligned}
\qquad \left\{\begin{aligned} \mu_0 &= 1 \\ \mu_1 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left(or \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \right)$$

$$\begin{aligned}
&= itm + [\frac{(it)^2}{2!}\mu_2 + \frac{(it)^3}{3!}\mu_3 + \frac{(it)^4}{4!}\mu_4 + \cdots \\
&\qquad - \frac{1}{2}[\left(\frac{(it)^2}{2}\right)^2\mu_2^2 + \cdots\ \cdots \\
&\qquad + \cdots\ \cdots \\
&= itm + \frac{(it)^2}{2!}\mu_2 + \frac{(it)^3}{3!}\mu_3 + \frac{(it)^4}{4!}(\mu_4 - 3\mu_2^2) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}C_k
\end{aligned}$$

Les C_k sont les cumulant

$C_1=m_X$=moyenne=E(X) ;

$C_2=\mu_2$=variance=V(X)=σ_X^2= écart-type au carré=$\mu'_2-(\mu'_1)^2$

$C_3= \mu_3= \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'^3_1$;

$C_4= \mu_4 - 3\mu_2^2 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'^2_2 - 3\mu'^4_1$.;

C_5 = ...

On définit :

$$\beta_1 = \frac{C_3}{(C_2)^{3/2}} \quad coefficient\ d'asymétrie$$

$$\beta*_2 = \frac{C_4}{(C_2)^2} = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{(\mu_2)^2} = \beta_2 - 3 \quad coefficient\ d'asymétrie\ par\ rapport\ à\ la\ loi\ de\ Gauss$$

$\beta_1 < 0$ distribution statistique qui penche vers la gauche de la moyenne.

$\beta_1 = 0$ distribution statistique symétrique.

$\beta_1 > 0$ distribution statistique qui penche vers la droite de la moyenne.

$\beta^*_2 < 0$ distribution statistique moins aplatie que la loi de Gauss.

$\beta^*_2 = 0$ distribution statistique avec le même aplatissement qu'une loi de Gauss.

$\beta^*_2 > 0$ distribution statistique plus aplatie que la loi de Gauss.

Résumé :

$$\psi_X(t) = \ln \varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} C_k = \ln\left[\int_D e^{itx} dF_X(x)\right] \Leftrightarrow \int_{D_x} e^{itx} f_X(x)dx = e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}K_k}$$

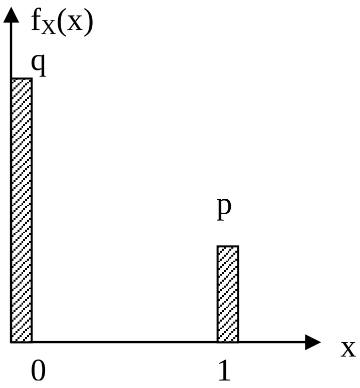
$$\Leftrightarrow \quad f_x(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{D_x} e^{-itx}.e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}K_k} dt$$

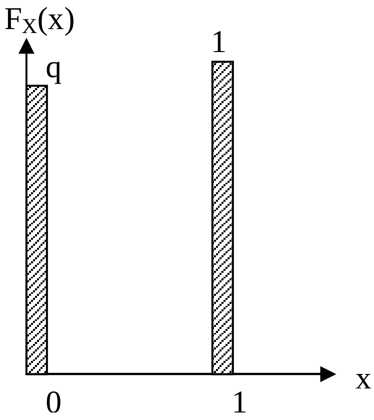
Donc la fonction de densité de probabilité (et de répartition) se décrit en fonction des cumulants donc des moments donc des facteurs de formes donc elle dépend d'elle-même !!!!!.
Cette démarche théorique n'est pas exploitable en pratique mais confirme le principe qu'une loi de probabilité dépend des coefficients de formes de la variable aléatoire étudié. D'où la nécessité d'une démarche pragmatique. Ceci se traduit par une modélisation probabiliste au cas par cas. Mais non pas pour chaque variable aléatoire physique mais par « type d'aléatoire » rencontré.
L'expérience pile ou face est une expérience élémentaire fondamentale dans la modélisation probabiliste.

Lois et v.a. de type discret (une expérience dont les issues c'est la réussite ou l'échec).

* X v.a. binaire, elle est définie par X(A) = 1 et $X(\overline{A}) = 0$

L'ensemble des évènements est la réalisation de A ou son complément $\overline{A}$.
Donc c'est une v.a. qui ne peut prendre que les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives
p = p_r(A), $p_r(\overline{A})$=1-p = q avec A = « observer un pile » et $\overline{A}$ = « observer une face »
$p_r(0) = q$; $p_r(1) = p$
$P_r(X \le k) = \textit{probabilité cumulée}$ et $P_r(X = k) = \textit{probabilité simple}$





Alors :

$$\varphi_X(t) = \int_D e^{itx} dF_X(x) = \sum_{k=0}^{1} e^{itk} p(X = k) = e^{it0} q + e^{it1} p = pe^{it} + q$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi_X(t) = pe^{it} + q$$

$$Donc \quad \psi_X(t) = \ln \varphi_X(t) = \ln\left[1 + p(e^{it} - 1)\right]$$

$$\left\{ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \right.$$

$$= \ln\left[1 + p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= p \quad [it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \cdots \\
&-\frac{1}{2}p^2[\quad (it)^2 + 2(it)\frac{(it)^2}{2} + \frac{(it)^2}{2}\frac{(it)^2}{2} + 2(it)\frac{(it)^3}{3!} + \cdots \\
&+\frac{1}{3}p^3[\quad (it)^3 + (it)(it)^2(it) + \frac{(it)^2}{2}(it)^2 + \cdots \\
&-\frac{1}{4}p^4[\quad (it)^4 + \cdots \\
&+\cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

$$= itp + \frac{(it)^2}{2!}(p-p^2) + \frac{(it)^3}{3!}(p-3p^2+2p^3) + \frac{(it)^4}{4!}(p-7p^2+12p^3-6p^4) + \cdots$$
$$= itC_1 + \frac{(it)^2}{2!}C_2 + \frac{(it)^3}{3!}C_3 + \frac{(it)^4}{4!}C_4 + \cdots$$
Donc :

$C_1=E(X)=p$ $C_2=V(X)=pq$ donc $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{pq}$ $C_3=pq(q-p)$ $C_4=pq(1-6pq)$ $\beta_1=\frac{q-p}{\sqrt{pq}}$; $\beta^*_2=\frac{1-6pq}{pq}$

Remarque :
La v.a. qui nous venons d'étudier a conduit à une loi de probabilité de type discontinu. Cette v.a. est de type entier et appartient à l'ensemble fini [0 ;1]. La distribution qui en découle est intéressante dans la mesure où elle est à la base de loi de probabilité plus générale.
En effet dans le contexte de la fiabilité, un système ne pouvant que présenter deux états (fonctionnement S et non fonctionnement $\overline{S}$). Sa fiabilité est alors $R=P_r(S)$.

- n expériences indépendantes qui conduisent à n réalisations d'une variable aléatoire binaires $(A \text{ ou } \overline{A})$ amènent la question suivante : Quel est le nombre de réalisation de A sur n ?

Soit X= « v.a. nombre de réalisation de A » (lancer une pièce n fois ; combien de fois nous avons pile ?)

$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$; X_k : v.a. de type binaire

X peut prendre les valeurs appartenant à l'ensemble { 0 ; 1 ; 2 ; . . . . . ; n}
Pour connaître la loi de X ; il faut connaître les fonctions caractéristiques.

$$* \ \varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = (pe^{it}+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} e^{itk} = (par\ définition) \sum_{k=0}^{n} e^{itk} P(X=k)$$

par comparaison (et identification)

$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$; $P(X \le k) = \sum_{j=0}^{k} C_n^j p^j q^{n-j}$ avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$* \ \psi_X(t) = \ln \varphi_X(t) = n.\ln \varphi_{X_k}(t) = n.\psi_{X_k}(t)$$

Donc : $C_r(X)=nC_r(X_k)$

$C_1=E(X)=np$ $C_2=V(X)=npq$ donc $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{npq}$ $C_3=\mu_3=npq(q-p)$ $C_4=\mu_4-3\mu_2^2=npq(1-6pq)$

$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{q-p}{\sqrt{pq}}$; $\beta^*_2 = \frac{1}{n}.\frac{1-6pq}{pq}$

Cette loi est nommée la loi Binomiale

$L(X)=\mathscr{B}(n ;p)$

- relation importante: Soient k v.a. X_k {i=1, . . . ,m} de loi respectives $\mathscr{B}(n_k;p)$

Définissons

$$Y = \sum_{k=1}^{m} X_k \ \ et\, calculons\, sa\, loi\, depuis\, \varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{m} \varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{m} (pe^{it}+q)^{n_k} = (pe^{it}+q)^{\sum_{k=1}^{m} n_k}$$

$$Donc \quad L(Y) = B(N = \sum_{k=1}^{m} n_k ; p)$$

<u>Tendance limite de la loi Binomiale B(n ;p)</u>

1) Lorsque $n \to \infty$ *et* $p \to 0$ de telle sorte que le produit np ait une valeur finie λ. Donc dans le cas où nous avons un grand nombre d'épreuves indépendants et la probabilité de l'évènement est très faible. La loi résultante se nomme la loi des évènements rares.

Nous savons que

$$\psi_X(t) = n\ln\left[1+p(e^{it}-1)\right] = n\left[p(e^{it}-1) - \frac{p^2}{2}(e^{it}-1)^2 + \frac{p^3}{3}(e^{it}-1)^3 + \cdots\right]$$

$$car \quad \left|p(e^{it}-1)\right| \prec 1 \; donc \quad \lim_{\substack{p\to 0\\ n\to\infty}} \psi_X(t) = np(e^{it}-1) = \lambda(e^{it}-1)$$

$$\varphi_X(t) = e^{\psi_X(t)} = e^{\lambda(e^{it}-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}.P(X=k) \; et \; e^{\lambda(e^{it}-1)} = e^{-\lambda}.e^{\lambda e^{it}} = e^{-\lambda}.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.e^{itk}$$

$$donc \quad P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!} \quad Loi \quad de \quad POISSON \quad \mathrm{P}(\lambda)$$

$$*\, Somme\ de\ plusieurs\ v.a.\ de\ type\ poisson:$$

$$Soient\ X_k\{i=1,2,\cdots,n\} \quad / \quad L(X_k) = P(\lambda_k)$$

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k;\ \varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(e^{it}-1)} = e^{(e^{it}-1)(\sum \lambda_k)}$$

$$Donc \quad L(X) = P(\lambda = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k)$$

2) Soit X une v.a. qui suit une loi Binomiale. L(X)=B(n ;p) ; E(X) = np et V(X) = npq

Etudions la loi de $L(Z = \frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}})$.

$Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} = \frac{X}{\sqrt{npq}} - \frac{np}{\sqrt{npq}} = aX - npa$ donc $\varphi_Z(t) = e^{it(-npa)}.\varphi_X(at)$ et

$$\psi_Z(t) = \ln\varphi_Z(t) = it(-npa) + \ln[\varphi_X(at)] = it(-npa) + n\ln[1+p(e^{ita}-1)]$$

$$= it(-npa) + n[\ln(1+p\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(iat)^\alpha}{\alpha!})] = it(-npa) + n\left[p\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(iat)^\alpha}{\alpha!} - \frac{p^2}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(iat)^\alpha}{\alpha!}\right)^2 + \frac{p^3}{3}\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(iat)^\alpha}{\alpha!}\right)^3\cdots\right]$$

$$= it(-npa) + n[\,p(iat + \frac{(iat)^2}{2!} + \frac{(iat)^3}{3!} + \frac{(iat)^4}{4!} + \cdots - \frac{p^2}{2}((iat)^2 + (iat)^3 + \cdots + \frac{p^3}{3}((iat)^3 + \cdots \quad]$$

$$= it\underbrace{(-anp) + np(iat)}_{=0} + \frac{(it)^2}{2!}\underbrace{[npa^2 - np^2a^2]}_{=1} + F(n^\alpha) = \frac{(it)^2}{2!} = \frac{-t^2}{2} \quad puisque \quad \lim_{n\to\infty} F(n^\alpha) = 0$$

Alors $\lim_{n\to\infty}\psi_Z(t) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(it)^2}{2} + F(n^\alpha)\right] = \frac{-t^2}{2} = (\,par\ définition)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(it)^\alpha}{\alpha!}C_\alpha$ donc $C_1=0$; $C_2=1$ et $C_\alpha=0$ pour $\alpha \geq 2$

$$Donc \quad \varphi_Z(t) = e^{-t^2/2} \quad ; et \;\; f_Z(z) = \frac{1}{2\pi}\int \varphi_Z(t)e^{-itz}dt$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}.e^{-t^2/2}dt \;\; f_Z^{'}(z) = \frac{1}{2\pi}(-i)\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{(e^{-itz})}_{u}.\underbrace{e^{-t^2/2}.t.dt}_{dv} = \frac{-i}{2\pi}\left\{[uv]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v.du\right\} = \frac{+i}{2\pi}\left\{\left[e^{-itz}.e^{-t^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}.(-iz)e^{-itz}dt\right\}$$

$$= \frac{-z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}e^{-t^2/2}dt = f_Z(z).(-z)$$

$$donc \;\; f_Z^{'}(z) = -z\;\; f_Z(z) \; alors \;\; f_Z(z) = Ce^{-z^2/2} \;\; et \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)dz = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$alors \;\; f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \;\; il\ s'agit\ de\ la\ loi\ de\ GAUSS\ centrée\ réduite\ N(m=0;\sigma=1)$$

Et la loi de X tend quand $n\to\infty\ et\ p\geq 0{,}1$ vers une loi de Gauss N(m_X=np, $\sigma_X = \sqrt{npq}$)

Les lois de probabilités (suite)

Tirage avec remise $\mathscr{B}$(n,p)

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

X = « Nombre de réalisations de l'évènement élémentaire »

Tirage sans remise (Processus exhaustif)

Dans un carton si nous avons N pièces avec a défectueuses et b non défectueuses, soit X = « Nombre de pièces défectueuses obtenues après n tirages ».

P(X=k) = « probabilité que le nombre de défectueux après les n tirages sans remise soit de k »

Il y a C_a^k possibilités de tirer une pièce défectueuse. A chacune de ces possibilités, on peut associer C_b^{n-k} possibilités de tirer n-k pièces non défectueuses parmi b.

$$P(X=k)=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n} \quad ;si \quad p=\frac{a}{N} \quad q=\frac{b}{N} \quad donc \quad P(X=k)=\frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$on\ démontre\ E(X)=np \quad et \quad V(X)=\frac{N-n}{N-1}.np(1-p) \quad ainsi\ que\ \min X=\max(0;n-Nq)\ et\ \max X=\min(n;Np)$$

Il s'agit de la loi nommée la loi Hypergéométrique $\mathscr{H}$(N, n, p).

Si $N\to\infty$ alors $V(X)\to npq$ et $P(X=k)\to C_n^k p^k q^{n-k}$ donc la loi Binomiale

En pratique, ce résultat est vrai dès que $\frac{n}{N}\prec 10\%$. Ayant vu que la loi Normale est une loi limite d'une loi Binomiale, et avec le fait que la loi Binomiale est une limite de la loi hypergéométrique, nous cherchons à savoir s'il peut y avoir d'autres loi qui sont engendrés par la loi hypergéométrique, pour faire nous allons étudier le ratio suivant :

$\frac{P(X=k+1)-P(X=k)}{P(X=k)}=G(n,N,p,q,k)$ On démontre : $G=\frac{\Delta y_k}{y_k}=\frac{A+Bk}{C+Dk+Ek^2}$ avec A, B, C, D et E des constantes qui dépendent de N, n, p et q d'où la proposition de K. PEARSON qui consiste à imaginer une fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ d'une variable aléatoire continue X qui peut être en adéquation avec la loi Hypergéométrique et qui pourra satisfaire le même type que la relation précédente et qui aura la forme de l'équation différentielle suivante

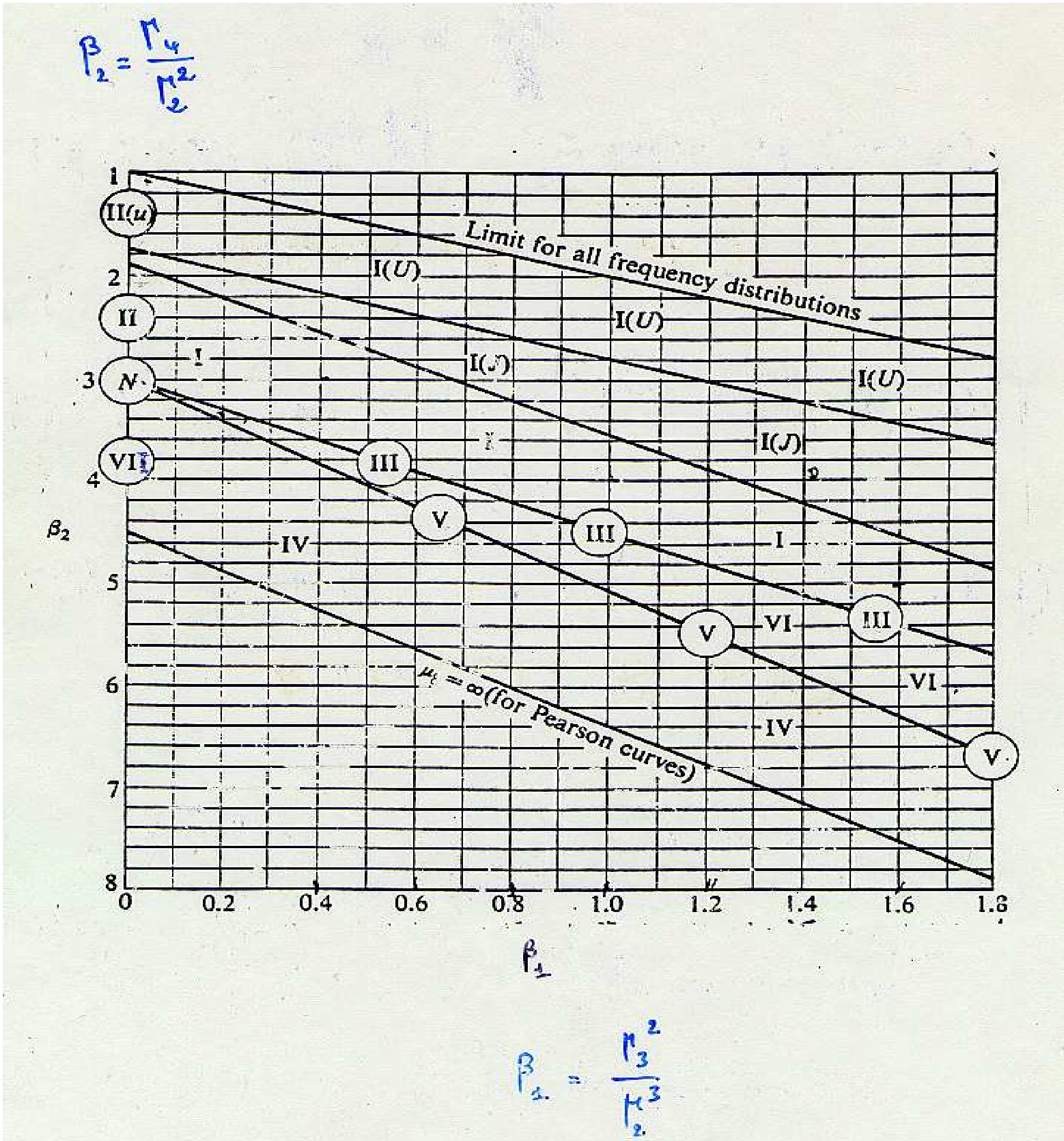
$$\frac{1}{f}.\frac{df}{dx}=\frac{ax+b}{cx^2+dx+c}$$

Ensuite K. PEARSON démontre que les constantes a, b, c, d, et e dépendent des coefficients de formes

moyenne	Variance ou Ecart-type	Coefficient d'asymétrie	Coefficient d'aplatissement
μ'_1	$\mu_2=(\sigma_X)^2$	$\beta_1=\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$	$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

De plus une présentation simplifiée peut conduire à exprimer le système en fonction uniquement de β_1 et β_2. K. Pearson constate que quelque soit β_1 et β_2, il ya que 7 solutions à cette équation différentielle qui sont représentées sur la figure qui suit.

Attention cette figure est présentée en fonction de β^E_1 et β_2. Avec $\beta^E_1=(\beta_1)^2$



Pour des considérations présentées en amphi. Les 7 solutions nous les résumons en 3 qui sont les lois BETA1 ($\mathscr{B}^1$), BETA2 ($\mathscr{B}^2$) et GAMMA (Γ).

La loi Beta1 ($\mathscr{B}^1$)

Il s'agit d'une loi définie entre deux bornes et dépend de deux paramètres. Il est primordial de faire un changement de variable (voir la présentation en amphi) pour ramener la présentation à l'intervalle [0 ; 1]. Dans ce cas, la loi Beta1 s'exprime de la manière suivante :

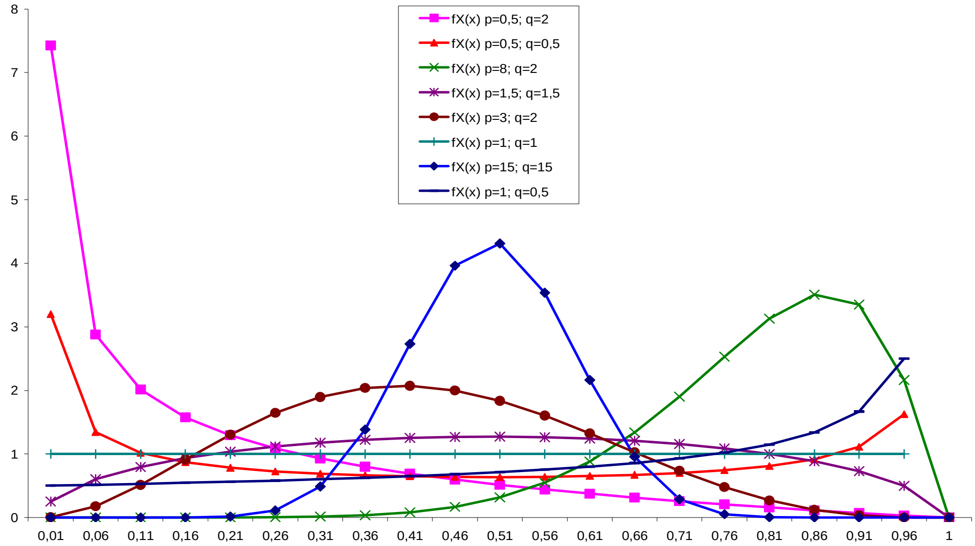
$$f_X(x) = \frac{\gamma(p+q)}{\gamma(p)\gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} \quad x \in [0;1] \quad avec \;\; \gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$$

$$\phi_X(t) = \frac{\gamma(p+q)}{\gamma(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{\gamma(p+k)}{\gamma(p+q+k)}$$

$$E(X) = m_X = \frac{p}{p+q} \qquad V(X) = (\sigma_X)^2 = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

$$F_X(x) = \Pr oba(X \le x) = \frac{\gamma(p+q)}{1-x} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{p+k}(1-x)^{q-k}}{\gamma(p+k+1)\gamma(q-k)}$$

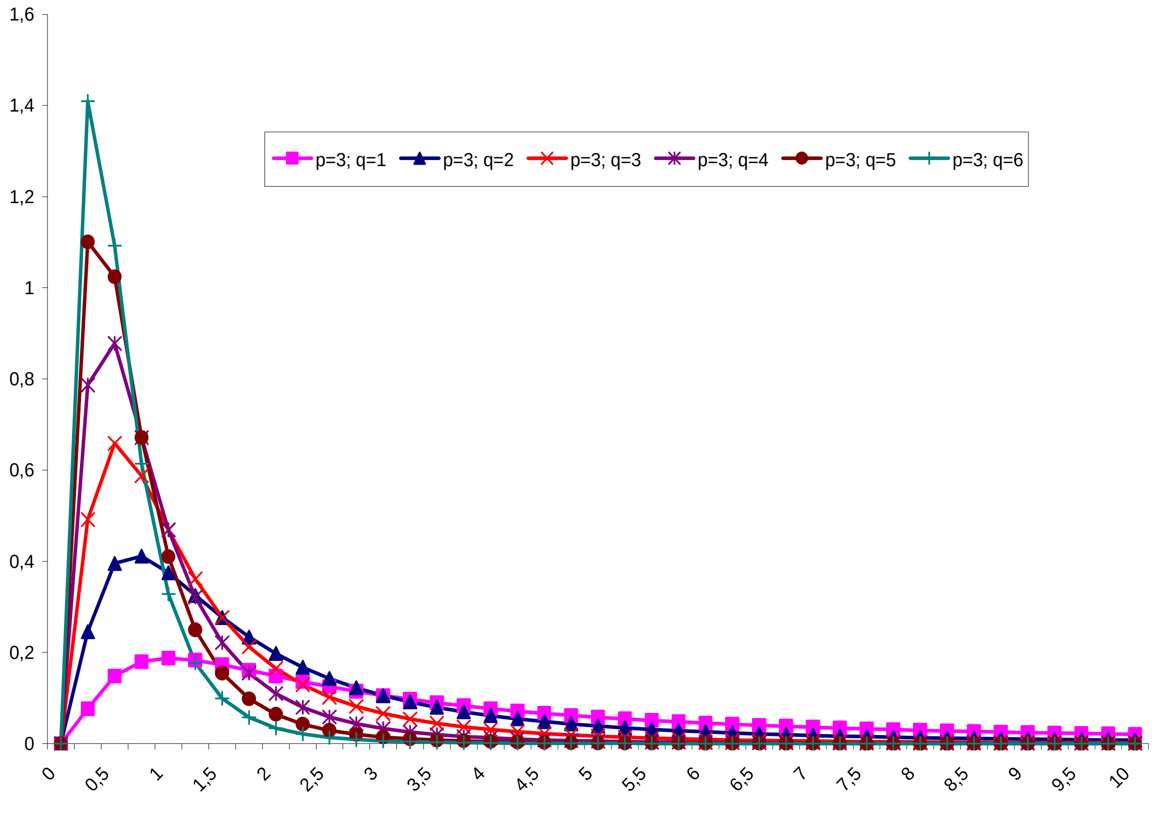
Les relations inverses entre p, q et m_X et σ_X sont données en amphi.



La loi Beta2 ($\mathscr{B}^2$)

Il s'agit d'une loi définie entre un seuil (δ) et l'infini et dépend de deux paramètres. Il est primordial de faire un changement de variable (voir la présentation en amphi) pour ramener la présentation à l'intervalle [0 ; ∞[. Dans ce cas, la loi Beta2 s'exprime de la manière suivante :

$f_X(x) = \dfrac{\gamma(p+q)}{\gamma(p)\gamma(q)} \cdot \dfrac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}}$	$E(X) = m_1 = \dfrac{p}{q-1} \quad V(X) = (\sigma_X)^2 = \dfrac{p(p+q+1)}{(q-1)^2(q-2)}$ $F_X(x) = \dfrac{1}{\gamma(p)} \cdot \dfrac{x^p}{(1+x)^{p+q}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\gamma(p+q+k)}{\gamma(p+q+1)} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^k$ $\phi_X(t) = \dfrac{\gamma(p+q)}{\gamma(p)\gamma(q)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(it)^k}{k!} \beta^2 .(p+k; q-k)$



La loi Gamma (Γ)

Il s'agit d'une loi définie entre un seuil (δ) et l'infini et dépend de deux paramètres. Il est primordial de faire un changement de variable (voir la présentation en amphi) pour ramener la présentation à l'intervalle [0 ; ∞[. Dans ce cas, la loi Gamma s'exprime de la manière suivante :

$$LOI \quad GAMMA \qquad \Gamma(a;\, p;\delta) \qquad f_X(x) = \frac{a^P}{\gamma(p)}.(x-\delta)^{p-1}\exp(-a(x-\delta))$$

1) $si\ L(X) = \Gamma(a;p;0); \quad \phi_X(t) = (1-\frac{it}{a})^{-p} \quad et \quad \psi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}p\frac{(k-1)!}{a^k}$ et $x_{mode} = \delta + \frac{p-1}{a} \quad < E(X)\ \forall x$

$$et\ C_1 = E(X) = d + \frac{p}{a};\ C_2 = V(X) = \frac{p}{a^2};\ C_3 = \frac{2p}{a^3};\ C_4 = \frac{6p}{a^4};\ F_X(x) = e^{-ax}\sum_{k=p}^{\infty}\frac{(ax)^k}{\gamma(k+1)}$$

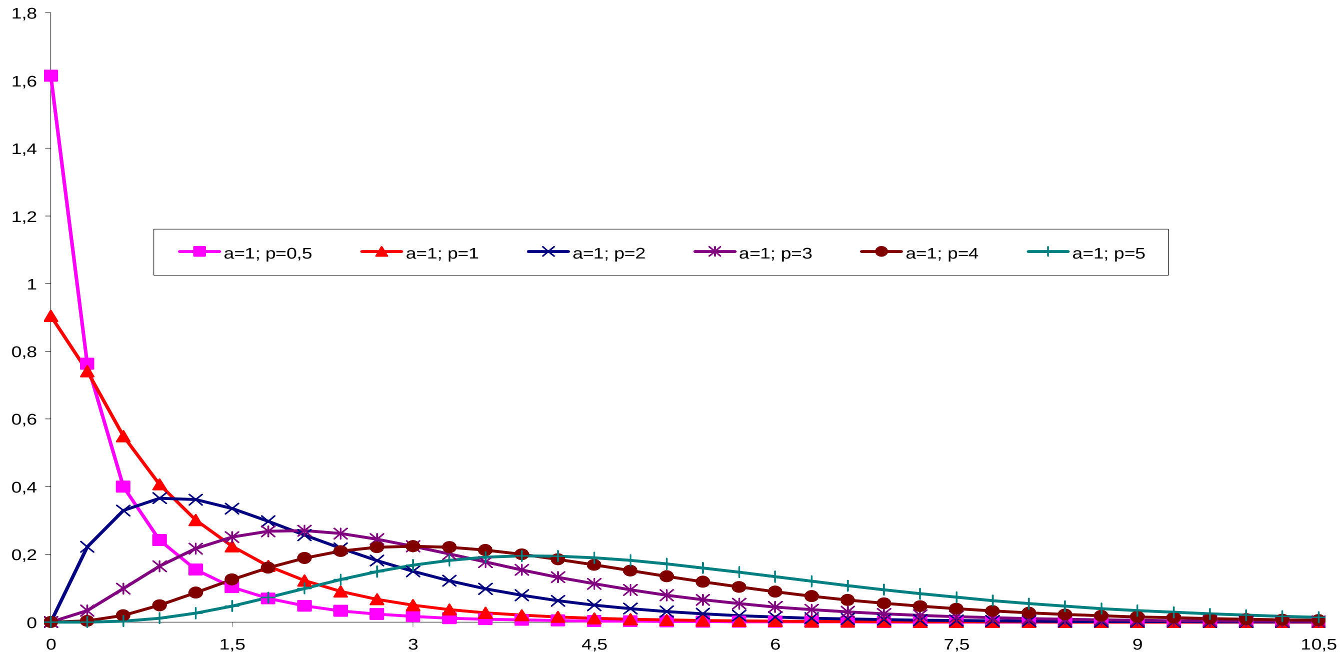
2) $si\ p = \frac{1}{2};\ a = \frac{1}{2};\ \delta = 0;\ L(X) = \Gamma(\frac{1}{2};\frac{1}{2})\ si\ on\ définit \quad X = Z^2\ et\ Z \in \Re$

On démontre que L(Z)=loi de gauss centrée réduite=N(0 ; 1).

3) $* Si\ \ p = 1;\ d = 0;\ f_X(x) = ae^{-ax};\ L(X) = E(a)\ Loi\ \exp\ onentielle$

$* Si\ \ a = 1;\ d = 0;\ E(X) = p;\ V(X) = p;\ propriétée \quad s\ d'une\ loi\ de\ poisson$

4) $si\ X_\beta\ indépendantes\ entre\ elles\ et\ L(X_\beta) = \Gamma(a;p_\beta) \quad ;si\ on\ définit \quad Y = \sum_{\beta=1}^{n}X_\beta \qquad L(Y) = \Gamma(a;\sum_{\beta=1}^{n}P_\beta)$



$* relation \quad entre \quad B^1\ et\ B^2$

$$1)\ si\ \ L(Y) = B^1(p;q) \quad ; \quad X = \frac{Y}{1-Y} \quad L(X) = B^2(p,q)$$

$$2)\ si\ \ L(X) = B^2(p;q) \qquad Y = \frac{X}{1+X} \quad L(Y) = B^1(p;q)$$

$* reation \quad entre \quad \Gamma\ et\ B^2$

$$si\ \ L(Y) = \Gamma(a;\,p)\ et\ \ L(Z) = \Gamma(a;q)\ \ pour \quad X = \frac{Y}{Z}\ L(X) = B^2(p;q)$$