

IA41

**Concepts fondamentaux en Intelligence Artificielle
et langages dédiés**

CM #4

**Systemes formels et
logique des propositions**

Fabrice LAURI

(Très brève) Introduction à la logique

Dans l'antiquité

Pour *Aristote* :

- Logique = instrument du savoir, non le savoir lui-même.
- Etudier les lois du discours
- Distinguer les raisonnements corrects de ceux incorrects.

Années 50

- Volonté de mécaniser/automatiser la pensée rationnelle
- Développement de programmes de démonstration de théorèmes
- Quelques succès mais rapidement, essoufflement.

(Très brève) Introduction à la logique

Années 70

Nouveaux résultats :

- Exécution d'un programme = effectuer une déduction logique
- Programme = preuve de l'obtention d'un théorème (le résultat) à partir d'autres théorèmes (les données initiales).
- La logique : outil conceptuel pour décrire l'action d'un ordinateur et définir des algorithmes.

1972 : Apparition de PROLOG, démonstrateur de théorèmes

Objectif du cours de logique

→ Etudier les **mécanismes déductifs** permettant de tirer des **conclusions** à partir d'**hypothèses** (prémises données), c'est-à-dire d'enchaîner toutes les **étapes d'inférence**.

→ Essayer dans la mesure du possible de mécaniser la pensée.

Ce sont les bases de l'Intelligence Artificielle.

Démonstration automatique et systèmes formels

Démonstration automatique

Systemes formels

- Introduction**
- Définition d'un système formel**
- Exemples de systèmes formels et interprétations possibles**
- Inférence, preuve et théorèmes**
- Consistance, complétude et cohérence d'un système formel**
- Limitations des systèmes formels**

Démonstration automatique

Systemes formels

- Introduction

- Définition d'un système formel

- Exemples de systèmes formels et interprétations possibles

- Inférence, preuve et théorèmes

- Consistance, complétude et cohérence d'un système formel

- Limitations des systèmes formels

Introduction

La logique formelle se propose d'élaborer une **théorie des raisonnements valides**.

Raisonnement purement **syntaxique** et non sémantique.

Les éléments du discours sur lesquels porte le raisonnement peuvent être arbitrairement substitués par d'autres sans modifier la validité du raisonnement.

Exemple :
(syllogisme)

« *Les hommes sont mortels*
Socrate est un homme
Donc Socrate est mortel »

Les mots *homme*, *mortel* et *Socrate* sont substituables par des symboles : le raisonnement restera valide.

Introduction

Le modèle abstrait de ce raisonnement est :

« Si tout X est Y
Si Z est un X
Alors Z est Y. »

X, Y, Z = variables, symboles substituables

Si, Alors = opérateurs, symboles non substituables

Démonstration automatique

Systemes formels

- Introduction
- **Définition d'un système formel**
- Exemples de systèmes formels et interprétations possibles
- Inférence, preuve et théorèmes
- Consistance, complétude et cohérence d'un système formel
- Limitations des systèmes formels

Définition d'un système formel (1/2)

Définition :

Un système formel est un ensemble de données purement abstrait, sans liens directs avec l'extérieur.

Il décrit les règles de manipulation d'un ensemble de symboles traités de manière uniquement syntaxique, c'est-à-dire sans considération du sens.

Principe :

- agencement de symboles → représentation
- axiomes = faits supposés vrais que l'on ne remet jamais en cause
- règles de déduction → production de connaissances

Définition d'un système formel (2/2)

Un système formel est constitué de :

- un alphabet fini (ou infini dénombrable) de **symboles**,
- un procédé de construction des **mots**, ensemble F des **formules bien formées**,
- un ensemble d'**axiomes**, énoncés supposés vrais
- un ensemble fini de **règles de déduction** qui permettent de déduire d'un ensemble fini de mots un autre ensemble de mots, tel que :

$$u_1, u_2, \dots, u_p \xrightarrow[\text{déduire}]{\text{permet de}} w_1, w_2, \dots, w_n$$

Démonstration automatique

Systemes formels

- Introduction
- Définition d'un système formel
- Exemples de systèmes formels et interprétations possibles
- Inférence, preuve et théorèmes
- Consistance, complétude et cohérence d'un système formel
- Limitations des systèmes formels

Exemple #1 de système formel

Système (JP) (proposé par *Hofstadter*) est défini par :

- Alphabet : $Z = \{ a, b, \square \}$
- Mots = suite de symboles quelconques de Z
- Axiome : $a\square a$
- Règle : R1) $c_1\square c_2 \rightarrow bc_1\square bc_2$

a, b : constantes
 \square : opérateur

} Non substituables

c_1, c_2 : variables substituables par n'importe quelle suite de symboles a ou b

Quelques définitions

Inférence (ou dérivation) :

Production d'un ensemble de mots par l'application d'une règle (la règle d'inférence) sur un ou plusieurs mots.

Théorèmes :

Formules dérivables à partir des axiomes. En particulier tout axiome est un théorème.

Preuve (ou démonstration) :

Suite finie de mots M_1, M_2, \dots, M_r , dans laquelle chaque M_i est soit un axiome, soit une formule se déduisant par l'application d'une règle d'inférence sur un des mots précédents M_j avec $j < i$.

Fonctionnement de (JP)

Application successive de la règle R1) à partir de l'axiome :

- $a \sqsupset a$
- $ba \sqsupset ba$
- $bba \sqsupset bba$
- $bbba \sqsupset bbba$

L'ensemble des théorèmes de (JP) est :

$$T = \{ b^*a \sqsupset b^*a \}$$

$bbba \sqsupset bbba$ est un théorème.

$baa \sqsupset$, $\sqsupset a \sqsupset b$, $aabb \sqsupset a$ sont des formules mais non des théorèmes.

Exemple #2 de système formel

Le système (DH) de *D. Hofstadter* est défini par :

- Alphabet : $Z = \{ M, I, U \}$
- Mots : toute suite de lettres de Z
- Axiome : MI
- Règles de déduction :
 - R1) $ml \rightarrow mlU$ (production)
 - R2) $Mm \rightarrow Mmm$ (production)
 - R3) $III \rightarrow U$ (réécriture)
 - R4) $UU \rightarrow$ (réécriture)

Remarques

- Dire que R1 est une règle de production signifie qu'elle ne s'applique que si la dernière lettre d'un théorème est I. Dans ce cas on peut déduire du théorème MIUMI le théorème MIUMIU.
- R2 permet de déduire à partir du théorème MUI le théorème MUIUI.
- R3 autorise par exemple le passage de MUIIIUM à MUUUM.
- R4 indique que toute chaîne de 2 U consécutifs peut être purement et simplement supprimée.
MUUUUMM devient MMM

Fonctionnement de (DH)

Application successive des règles à partir de l'axiome :

- 1) MI : axiome
- 2) MII : R2 à partir de 1)
- 3) MIIII : R2 sur 2)
- 4) MIIIIU : R1 sur 3)
- 5) MIUU : R3 à partir de 4) en 3ème position
- 6) MI : R4 à partir de 5)

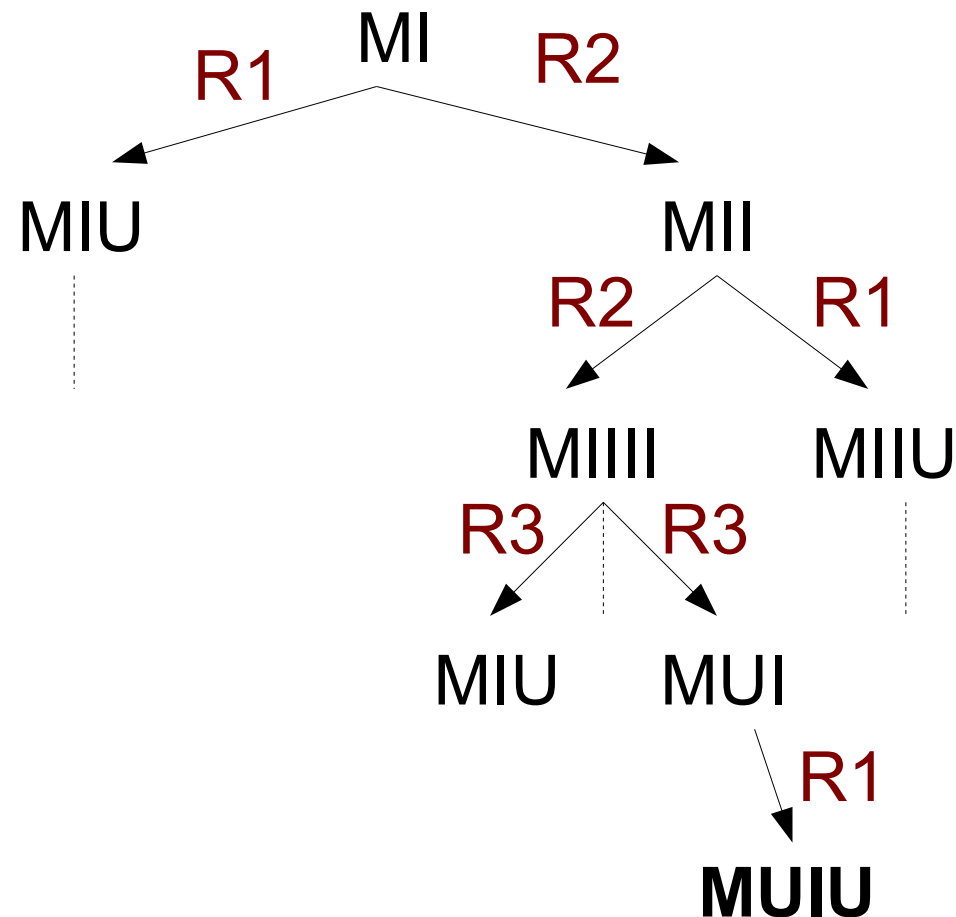
...

Questions :

- peut-on prouver facilement qu'une formule est un théorème ?
- peut-on prouver facilement qu'une formule N'EST PAS un théorème ?

MUIU est-il un théorème de (DH) ?

On a l'arbre de génération des théorèmes suivants :



Remarque : dire que la formule t est dans T implique qu'elle commence par M (on part de l'axiome MI).

MU est-il un théorème de (DH) ?

On pourrait construire l'arbre de génération des théorèmes. Cet arbre ne permet pas ici de répondre à cette question, puisque cette formule n'est pas un théorème.

Un raisonnement comme le suivant est ici nécessaire :

- MU commence par le symbole M : MU peut donc être un théorème.
- Le but à atteindre (MU) impose de supprimer un I, au moins en partant de l'axiome M1.
- Cela ne peut se faire que via R2 et/ou R3, puisque R1 et R4 laissent inchangé le nombre total de I.
- R3 diminue le nombre total de I de 3 unités exactement, tandis que R2 dédouble ce nombre.
- R2 fabrique donc seulement des formules comportant un nombre pair de I, tandis que R3 ne peut diminuer ce nombre que de 3.

MU est-il un théorème de (DH) ?

- Pour obtenir un nombre nul de l , il faudrait appliquer $R3$ sur un mot comportant un nombre de l multiple de 3 et 3 exactement à la dernière opération. Or $R2$ n'engendre que des mots avec un nombre pair de l .

MU n'est donc pas un théorème de (DH).

Exemple #3 de système formel

Le système (PG) de *D. Hofstadter* est défini par :

- Alphabet : $Z = \{ p, g, - \}$
- Mots : toute suite de lettres de Z
- Axiome : $xp-gx-$ avec x composé d'un ou plusieurs tirets
- Règle d'inférence :
R1) $xpygz \rightarrow xpy-gz-$

x, y, z sont des variables.

Exemples de théorèmes :

--p---g-----

----p--g-----

Production d'un théorème par inférence :

--p--g---- \rightarrow --p---g-----

Plusieurs interprétations possibles

Première interprétation significative :

p ↔ plus

g ↔ égal

- ↔ 1

-- ↔ 2

--- ↔ 3

Signification apparente du système

Autre interprétation :

p ↔ plus

g ↔ supérieur ou égal

- ↔ 1

-- ↔ 2

--- ↔ 3

Intérêt des systèmes formels : interprétation (1/3)

Les systèmes formels sont des modélisations d'une certaine réalité concrète ou mathématique.

Interprétation :

C'est une mise en rapport d'un système formel avec un univers donné.

L'interprétation donne un sens à tout symbole du système, en établissant une correspondance univoque entre les symboles du système et des objets de l'univers.

Les théorèmes, interprétés, deviennent des énoncés, VRAIS ou FAUX.

→ Un même système peut modéliser plusieurs situations concrètes différentes (plusieurs interprétations possibles).

Intérêt des systèmes formels : interprétation (2/3)

Il existe une distinction entre **Preuve** (dans un SF) et **Vérité** (dans la réalité). En effet, rien n'assure que toute proposition vraie au sens commun corresponde à un mot démontrable : ce n'est pas parce que quelque chose est vrai qu'il en existe nécessairement une preuve...

Problème : adéquation entre théorème d'un système formel et énoncé vrai de la réalité.

4 cas se présentent dans la relation entre démonstration et valeur de vérité :

- un mot est un théorème (T)
- un mot est un non théorème (NT)
- son interprétation est vraie (V)
- son interprétation est fausse (F)

Intérêt des systèmes formels : interprétation (3/3)

T, V	T, F
NT, V	NT, F

T, V : cas sans problème

T, F : interprétation correspondante est sans intérêt. On ne considère que les interprétations qui associent la valeur VRAI à tous les théorèmes.

NT, F : association souhaitable mais pas toujours possible.

NT, V : les non théorèmes peuvent être vrais dans certaines interprétations. Il existe des systèmes formels tel que NT, V est non vide quelque soit l'interprétation.

Exemples de démonstrations (1/3)

(JP) $Z = \{ a, b, \square \}$ (alphabet)
 $F = Z^*$
 $A = \{ a \square a \}$ (axiome)
 $R = \{ c_1 \square c_2 \rightarrow bc_1 \square bc_2 \}$ (règle)
 $T = \{ b^* a \square b^* a \}$

Première interprétation :

- $a \leftrightarrow 0$
- $b \leftrightarrow$ successeur d'un nombre sur l'ensemble des entiers
- $\square \leftrightarrow$ signe d'égalité dans le même ensemble

A s'interprète $0 = 0$. Les théorèmes successifs s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 1 \\ 2 = 2 \\ \dots \end{array} \right\} \text{ sont tous vrais}$$

Exemples de démonstrations (2/3)

Réciproquement, un énoncé comme $1 = 2$, issu du non théorème $b \Box b$, n'est pas dans T .

« $1=2$ » est faux dans notre interprétation.

Conclusions :

- Correspondance parfaite entre $T \leftrightarrow V$ et $NT \leftrightarrow F$.
- L'interprétation est correcte dans l'arithmétique usuelle.

Exemples de démonstrations (3/3)

Deuxième interprétation :

$a \leftrightarrow$ Socrate est mortel

$b \leftrightarrow$ la négation

$\square \leftrightarrow$ l'identité de proposition

A s'interprète « Socrate est mortel » est identique à « Socrate est mortel » : énoncé vrai.

$ba\square ba$ s'interprète « Socrate n'est pas mortel » est identique à « Socrate n'est pas mortel » : énoncé vrai.

$bba\square a$ n'est pas un théorème, bien que « La négation de Socrate n'est pas un mortel est identique à Socrate est mortel » est un énoncé vrai dans notre interprétation. Ainsi NT, $V \neq \emptyset$.

Démonstration automatique

Systemes formels

- Introduction
- Définition d'un système formel
- Exemples de systèmes formels et interprétations possibles
- Inférence, preuve et théorèmes
- **Consistance, complétude et cohérence d'un système formel**
- Limitations des systèmes formels

Propriétés fondamentales des S.F.

Consistance :

Un système est **consistant** (ou non contradictoire) pour une interprétation donnée si tous les théorèmes, une fois interprétés, sont VRAIS, c'est-à-dire que :

$\nexists f \in F$ tel que f et $\neg f$ soient des théorèmes.

Complétude :

Un système est **complet** pour une interprétation donnée si toutes les assertions VRAIES exprimables à l'aide de formules bien formées du système sont des théorèmes.

Cohérence :

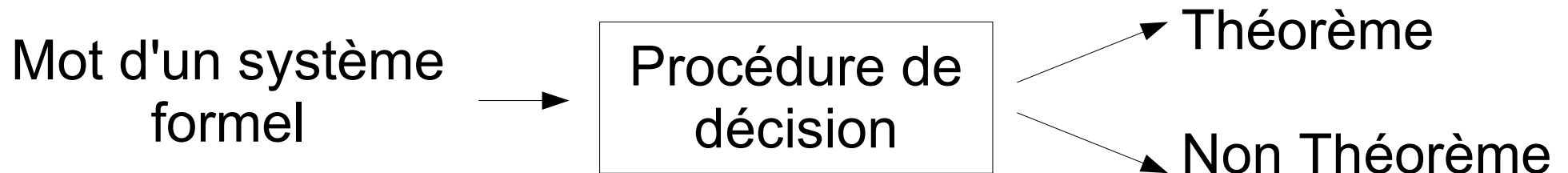
Un système formel est **cohérent** s'il existe des mots de l'ensemble F des formules bien formées qui ne sont pas des théorèmes.

Décidabilité des systèmes formels

Décidabilité :

Une formule bien formées f est décidable s'il est possible de déterminer, à l'aide d'une procédure, en un nombre fini d'étapes, si f est un théorème ou non.

Un système formel est décidable si pour n'importe quelle formule f , il est possible de répondre à la question : f appartient-elle à l'ensemble T des théorèmes ?



Problèmes :

- cette procédure de décision n'existe pas toujours
- il n'existe aucun procédé pour énumérer les non théorèmes

Démonstration automatique

Systemes formels

- Introduction
- Définition d'un système formel
- Exemples de systèmes formels et interprétations possibles
- Inférence, preuve et théorèmes
- Consistance, complétude et cohérence d'un système formel
- Limitations des systèmes formels

Limitations des systèmes formels

Les premières limitations des systèmes formels ont été posées par les théorèmes de *Gödel*, *Tarski* et *Church* :

Gödel (1930) :

« Il existe des systèmes formels contenant des mots m tels que ni m ni $\neg m$ ne sont démontrables. »

Tarski (1935) :

« Il existe des systèmes formels pour lesquels toute interprétation conduit à des énoncés à la fois vrais et non démontrables. »

Church (1936) :

« Il existe des systèmes formels indécidables, c'est-à-dire qui ne disposent pas d'une procédure pour séparer les théorèmes des non théorèmes. »

Logique des propositions (LP)

Logique propositionnelle (LP)

- Introduction
- Définitions
- Théorie des modèles
- Théorie de la démonstration
- Propriétés fondamentales de (LP)
- Décidabilité de (LP)
- Principe de résolution

Logique propositionnelle (LP)

- **Introduction**
- **Définitions**
- **Théorie des modèles**
- **Théorie de la démonstration**
- **Propriétés fondamentales de (LP)**
- **Décidabilité de (LP)**
- **Principe de résolution**

Introduction

La logique propositionnelle est la composante la plus simple de la logique classique.

Les éléments de son langage sont des énoncés susceptibles d'être soit vrais, soit faux.

Ils sont construits par composition à partir d'énoncés de base.

Exemple :

p = « Il fait beau et je suis en vacances. »

q = « Il fait beau. »

r = « Je suis en vacances. »

p est une proposition pouvant être soit vraie, soit fausse, en fonction de la véracité de q et r .

Logique propositionnelle (LP)

- Introduction
- **Définitions**
- Théorie des modèles
- Théorie de la démonstration
- Propriétés fondamentales de (LP)
- Décidabilité de (LP)
- Principe de résolution

Définition de (LP) (1/2)

(LP) est un système formel défini par :

- un **alphabet** composé de :
 - ensemble dénombrable SP de **symboles** (aussi appelés symboles propositionnels, atomes propositionnels ou propositions)
Exemples : symboles p, q, r, \dots
Un symbole représente un énoncé soit vrai, soit faux.
 - de **connecteurs logiques** : $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
 - de 2 **symboles auxiliaires** : (et)
Les parenthèses apparaissant dans les formules permettent d'indiquer dans quel ordre les règles de composition ont été utilisées pour les construire.

Définition de (LP) (2/2)

- des **mots** (ou **formules**) formés de la manière suivante :
 - un symbole propositionnel est un mot
 - si m est un mot alors (m) est un mot
 - si m est un mot alors $\neg m$ est un mot
 - si m_1 et m_2 sont des mots alors
 $m_1 \Leftrightarrow m_2, m_1 \Rightarrow m_2, m_1 \wedge m_2, m_1 \vee m_2$ sont des mots
- des axiomes et des règles d'inférences (voir plus loin)

Définition d'un littéral :

Un littéral est un atome (littéral positif) ou la négation d'un atome (littéral négatif).

Priorité des connecteurs (du + prioritaire au – prioritaire) :

$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Logique propositionnelle (LP)

- Introduction
- Définitions
- **Théorie des modèles**
- Théorie de la démonstration
- Propriétés fondamentales de (LP)
- Décidabilité de (LP)
- Principe de résolution

Théorie des modèles (1/8)

Objectif :

Etablir une procédure mécanique d'évaluation des formules propositionnelles, c'est-à-dire :

- substituer une **valeur de vérité** aux atomes
- donner un sens à une formule à partir de la valeur de vérité des atomes et des connecteurs
- associer à chaque connecteur une **table de vérité**

Théorie des modèles (2/8)

Définition d'une valuation d'un ensemble d'atomes :

Une valuation d'un ensemble d'atome $\{ a_1, \dots, a_n \}$ affecte à chaque atome a_i une valeur de vérité.

Définition de l'interprétation d'une formule :

Une interprétation d'une formule F dans laquelle apparaissent les atomes $\{ a_1, \dots, a_n \}$ est une valuation de $\{ a_1, \dots, a_n \}$.

Théorie des modèles (3/8)

Satisfiabilité d'une formule :

Une formule A est satisfiable par une interprétation I ou $I \models A$, si :

- si A est un atome, $I \models A$ ssi l'atome est vrai,
- si A est de la forme $\neg B$, $I \models A$ ssi non ($I \models B$),
- si A est de la forme $B \vee C$, $I \models A$ ssi ($I \models B$) ou ($I \models C$)
- si A est de la forme $B \wedge C$, $I \models A$ ssi ($I \models B$) et ($I \models C$)
- si A est de la forme $B \Rightarrow C$, $I \models A$ ssi (non ($I \models B$)) ou ($I \models C$)
- si A est de la forme $B \Leftrightarrow C$, $I \models A$ ssi (non ($I \models B$) et non ($I \models C$)) ou ($I \models B$ et $I \models C$).

Cette définition correspond à une définition sémantique des différents connecteurs.

Théorie des modèles (4/8)

Les tables de vérité des connecteurs :

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

A	$\neg A$
0	1
1	0

Comment simplifier une formule logique ? A l'aide d'un tableau de *Karnaugh*...

Théorie des modèles (5/8)

Définition d'une tautologie :

Une tautologie (formule valide) est une formule A vraie quelles que soient les valeurs de vérité associées aux atomes qui la composent. On note $\models A$.

Exemple :

Soit la formule $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.
Est-ce une tautologie ?

Théorie des modèles (6/8)

Autres définitions :

- Formule inconsistante : formule qui est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des atomes qui la composent.
- Formule contingente : formule qui est vraie dans certaines interprétations et fausse dans d'autres.

Remarque :

F est une tautologie ssi $\neg F$ est inconsistante.

Théorie des modèles (7/8)

Définition d'une substitution d'atomes :

Soit la formule F composée des atomes p_1, \dots, p_n . Soit la formule F^* obtenue en substituant aux atomes p_1, \dots, p_n les formules A_1, \dots, A_n . Alors si $\models F$, on a $\models F^*$.

Exemple : $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ et $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

Attention, la réciproque est fautive !

Exemple : $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$ et $r \Rightarrow s \dots$

Théorie des modèles (8/8)

Considérons les formules suivantes et construisons leur table de vérité :

$$A = (p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \quad B = (q \vee r) \quad C = (p \Rightarrow r)$$

Définition d'une conséquence logique :

Soient une formule B et une famille de formules A_1, \dots, A_n .

Soient p_1, \dots, p_n les atomes figurant dans les A_i et B .

B est une conséquence valide des A_i si dans les tables de vérité des A_i et de B , la formule B a la valeur 1 sur toutes les lignes où les A_i sont simultanément à 1.

On note alors $A_1, \dots, A_n \models B$.

Théorème : $A \models B$ est équivalent à $\models (A \Rightarrow B)$

Logique propositionnelle (LP)

- Introduction
- Définitions
- Théorie des modèles
- **Théorie de la démonstration**
- Propriétés fondamentales de (LP)
- Décidabilité de (LP)
- Principe de résolution

Théorie de la démonstration (1/3)

Objectif :

Déterminer la preuve d'une formule de manière purement mécanique, en appliquant des règles d'inférence à partir d'axiomes ou de formules prouvées dans des étapes précédentes.

Une règle d'inférence se présente sous la forme :

$$\frac{f_1, \dots, f_n}{f} \quad \begin{array}{l} \text{(prémisses)} \\ \text{(conclusion)} \end{array}$$

Théorie de la démonstration (2/3)

Définition d'un théorème :

Une formule A est un théorème, noté $\vdash A$, si A est un axiome ou si A est obtenue à partir de l'application d'une règle d'inférence sur d'autres théorèmes.

Définition d'une démonstration :

Une démonstration d'un théorème A est une suite finie $(A_1, \dots, A_i, \dots, A)$ où chaque A_i est soit un axiome, soit obtenu par application d'une règle d'inférence sur des théorèmes A_j et A_k ($j, k < i$) précédemment produits.

Théorie de la démonstration (3/3)

Définition d'une déduction :

On dit qu'une formule A se déduit d'un ensemble de formules $(B_1, \dots, B_i, \dots, B_n)$ et l'on note $B_1, \dots, B_i, \dots, B_n \vdash A$, s'il existe une suite finie $(A_1, \dots, A_i, \dots, A)$ où chaque A_i est soit un axiome, soit un des B_i , soit obtenu par application d'une règle d'inférence sur des théorèmes A_j et A_k ($j, k < i$) de la suite déjà obtenue.

Remarques :

B_i = hypothèse.

Démonstration : on part d'aucune hypothèse.

Déduction : on part d'au moins une hypothèse.

Axiomatique de (LP)

- trois **axiomes** dans (LP) :

$$(A_1) : (m_1 \Rightarrow (m_2 \Rightarrow m_1))$$

$$(A_2) : (m_1 \Rightarrow (m_2 \Rightarrow m_3)) \Rightarrow ((m_1 \Rightarrow m_2) \Rightarrow (m_1 \Rightarrow m_3))$$

$$(A_3) : (\neg m_2 \Rightarrow \neg m_1) \Rightarrow (m_1 \Rightarrow m_2)$$

où m_1, m_2 et m_3 sont des formules quelconques

- une **règle d'inférence** unique (le *Modus Ponens*) :

$$\frac{\vdash A, \vdash A \Rightarrow B}{\vdash B}$$

Démonstration de $\vdash (p \Rightarrow p)$

(A₁) avec $m_1 = p$ et $m_2 = p \Rightarrow p$ alors :

$$(1) \quad \vdash p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$$

(A₂) avec $m_1 = p$ et $m_2 = p \Rightarrow p$ et $m_3 = p$ alors :

$$(2) \quad \vdash (p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p))$$

Modus Ponens entre (1) et (2) :

$$(3) \quad \vdash (p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$$

(A₁) avec $m_1 = m_2 = p$ alors :

$$(4) \quad \vdash (p \Rightarrow (p \Rightarrow p))$$

Modus Ponens entre (3) et (4) :

$$(5) \quad \vdash p \Rightarrow p$$

Logique propositionnelle (LP)

- Introduction
- Définitions
- Théorie des modèles
- Théorie de la démonstration
- **Propriétés fondamentales de (LP)**
- Décidabilité de (LP)
- Principe de résolution

Propriétés fondamentales de (LP) (1/2)

Adéquation :

Une logique est dite adéquate si tout théorème A ($\vdash A$) est une formule valide ($\models A$).

(LP) est adéquat : si $\vdash A$ alors $\models A$.

Consistance :

Une logique est consistante s'il n'existe aucune formule A telle que $\vdash A$ et $\vdash \neg A$.

(LP) est consistant.

Propriétés fondamentales de (LP) (2/2)

Complétude forte :

Une logique est dite fortement complète ssi la relation de conséquence valide correspond à la relation de dérivabilité : soit E un ensemble de formules, si $E \models A$ alors $E \vdash A$.

Complétude faible :

Une logique est faiblement complète si toute formule valide est un théorème : quand $\models A$ alors $\vdash A$.

La complétude forte implique la complétude faible.

(LP) est fortement complet.

Logique propositionnelle (LP)

- Introduction
- Définitions
- Théorie des modèles
- Théorie de la démonstration
- Propriétés fondamentales de (LP)
- **Décidabilité de (LP)**
- Principe de résolution

Décidabilité de (LP) (1/2)

Décidabilité :

Une logique est décidable s'il existe un algorithme capable de déterminer en un nombre fini d'étapes si une formule donnée est ou n'est pas un théorème.

Emile Post démontre le résultat suivant :

« Une formule F est démontrable dans (LP) si et seulement si elle est valide, c'est-à-dire vraie dans toutes les interprétations de (LP). »

Décidabilité de (LP) (2/2)

Théorème de correspondance de *Post* :

Un mot de (LP) est un théorème ssi il prend la valeur d'interprétation VRAI, quelles que soient les valeurs des atomes qu'il contient.

On dispose alors d'une procédure de décision très sûre : les tables de vérité.

En effet, les théorèmes de (LP) coïncident avec les tautologies.

Exemple de preuve par la méthode des tables de vérité

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	F
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Preuve de $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

Logique propositionnelle (LP)

- Introduction
- Définitions
- Théorie des modèles
- Théorie de la démonstration
- Propriétés fondamentales de (LP)
- Décidabilité de (LP)
- Principe de résolution

Principe de déduction

Objectif :

Simplifier la démonstration de théorèmes en utilisant des formules logiques mises sous *forme normale conjonctive*.

Principe de déduction/résolution :

Prouver qu'une conclusion A peut se déduire des hypothèses E revient à prouver que E et $\neg A$ sont contradictoires.

Autrement dit, A est la conséquence valide de E ssi $E \cup \{ \neg A \}$ est inconsistant, c-à-d qu'il n'existe aucune interprétation M telle que chaque formule de E ainsi que $\neg A$ soit satisfaite par M .

Interprétation du résultat :

Toute preuve de déduction se ramène à une preuve d'inconsistance...

Forme normale d'une formule (1/2)

Définition d'une clause :

Une clause est une disjonction de littéraux $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$, les littéraux pouvant être positifs ou négatifs.

Notation des clauses :

- souvent sous forme d'ensemble.
- ensemble vide = clause vide (**toujours fausse**).

Forme normale conjonctive :

C'est une conjonction de clauses : $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$, encore notée $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$.

En particulier, $\{C_1, C_2, \dots, C_n\} \models A$ équivaut à $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n \models A$.

Forme normale d'une formule (2/2)

Normalisation d'une formule en forme normale conjonctive :

- | | | | |
|-----|-----------------------|---------------|--|
| 1. | $A \Leftrightarrow B$ | se réécrit en | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ |
| 2. | $A \Rightarrow B$ | se réécrit en | $\neg A \vee B$ |
| 3a. | $\neg(A \wedge B)$ | se réécrit en | $(\neg A \vee \neg B)$ |
| 3b. | $\neg(A \vee B)$ | se réécrit en | $(\neg A \wedge \neg B)$ |
| 4. | $\neg\neg A$ | se réécrit en | A |
| 5. | $A \vee (B \wedge C)$ | se réécrit en | $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |

Exemple :

Transformer la formule $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$ en f.n.c.

Principe de résolution

Théorème :

Soit N une forme normale, C_1 et C_2 deux clauses de N .

Soit p un atome tel que $p \in C_1$ et $\neg p \in C_2$.

Soit la clause $R = C_1 \setminus \{ p \} \cup C_2 \setminus \{ \neg p \}$.

Les formes normales N et $N \cup R$ sont logiquement équivalentes.
La clause R est appelée *résolvante* de C_1 et C_2 .

Si l'application récursive de ce principe sur un ensemble de clauses produit la clause vide, alors l'ensemble est inconsistant.

Exemple :

Est-ce que $\{ p \Rightarrow r, q \Rightarrow r \} \models (p \vee q) \Rightarrow r$?

Les clauses de Horn

Définition :

Une clause de Horn est une clause qui contient **au plus** un littéral positif.

Il existe trois types de clauses de Horn :

- **clause de Horn stricte** : un littéral positif et au moins un littéral négatif
- **clause de Horn positive** : un littéral positif, aucun littéral négatif
- **clause de Horn négative** : aucun littéral positif et zéro ou plusieurs littéraux négatifs.

Clause vide = clause négative.

Cadre d'application des clauses de Horn

- **clause de Horn positive** : un littéral positif, aucun littéral négatif

→ Fait :

p

- **clause de Horn stricte** : un littéral positif et au moins un littéral négatif

→ Règle du type Si ... Alors ... :

$q \vee \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n$ équivaut à $\{ p_1, p_2, \dots, p_n \} \models q$

- **clause de Horn négative** : aucun littéral positif et zéro ou plusieurs littéraux négatifs.

→ But à atteindre

Prouver $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n$ à partir de $\{ H_1, H_2, \dots, H_n \}$ revient à

prouver $\{ H_1, H_2, \dots, H_n \} \models (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n)$

Principe de résolution avec les clauses de Horn

Soit N une f.n.c. contenant la négation de la conclusion.

Les différentes étapes :

1. Si $\emptyset \in N$, l'ensemble est inconsistant et la résolution terminée.
2. Sinon choisir une clause C et une clause P telle que P est une clause de Horn réduite à p et C une clause contenant $\neg p$.
3. Calculer la résolvente R de P et de C .
4. Reprendre l'étape 1. en remplaçant N par $(N \setminus \{ C \}) \cup R$.

Exemple de résolution :

$$\{ \neg p \vee r, \neg r \vee s, p, \neg s \}$$